

TEORIA DE PORTFÓLIO: COMPOSIÇÃO ÓTIMA DE UMA CARTEIRA DE INVESTIMENTO

Zilmar José de SOUZA*
Edson Costa BIGNOTTO**

Resumo: O artigo objetiva a aplicação da Teoria do Portfólio, desenvolvida por Harry Markowitz, na composição ótima de uma carteira de ativos, buscando a maximização do retorno esperado, utilizando-se das técnicas da programação linear através da linguagem GAMS, aplicada à uma situação hipotética.

Palavras-chave: Portfólio; diversificação; retorno; risco; GAMS.

Introdução

O presente artigo visa a aplicação da Teoria do Portfólio, desenvolvida por Harry Markowitz, na composição ótima de uma carteira de ativos, objetivando a maximização do seu retorno esperado. Para tanto, utilizando-se das técnicas da programação linear através da linguagem GAMS, aplicadas à uma situação hipotética, apresentará resultados que possivelmente possam ser utilizados pelos gerenciadores de portfólios.

Será dividido em três partes, sendo a primeira representada pela breve revisão bibliográfica da Teoria do Portfólio de Markowitz e da composição de uma carteira dita ótima; a segunda parte envolverá a escolha dos ativos, observando os critérios da Teoria, de tal modo a encontrarmos o melhor conjunto retorno-risco, modelando-o de acordo com as técnicas da programação linear; e, finalmente, a terceira apresentará testes de aplicação do modelo, utilizando-se da linguagem GAMS e apontará os resultados, bem como as sugestões de uma carteira ótima e as considerações finais.

1. A Teoria do Portfólio

A Teoria do Portfólio de Harry Markowitz¹ discorre sobre maximização do retorno esperado de acordo aos níveis de aceitação do investidor perante o risco envolvido. De acordo com MARKOWITZ (1952), o processo de escolha de um portfólio divide-se em duas partes: primeiro, começa com observação e

* Economista Graduado na FEA/USP, Campus de Ribeirão Preto. Mestrando em Economia na ESALQ/USP, Campus de Piracicaba.

** Economista Graduado na FEA/USP, Campus de Ribeirão Preto. Mestrando em Economia na ESALQ/USP, Campus de Piracicaba

¹ Harry Markowitz foi o primeiro a introduzir o conceito de variância como medida de risco e devido a importância do trabalho, publicado na década de 50, foi premiado com o Prêmio Nobel de Economia (1990).

experiência do administrador de fundos e termina com crenças sobre a avaliação da performance futura; segundo, parte das crenças relevantes sobre a performance futura e termina com a escolha do portfólio.

O objetivo geral desta Teoria é o gerenciamento de carteiras de investimentos, através da seleção de portfólios (chamados portfólios eficientes) que maximizem os retornos esperados, dado um nível de risco. Para construção de um portfólio eficiente, supõe-se que o investidor seja avesso ao risco, ou seja, se há dois investimentos com o mesmo retorno esperado mas com riscos diferentes, o investidor prefere aquele com menor risco.

O retorno de um Portfólio é dado a partir da seguinte expressão:

$$R_p = w_1 R_1 + w_2 R_2 + \dots + w_g R_g$$

onde: R_p = taxa de retorno de um portfólio em um período; R_g = taxa de retorno do ativo g no período; w_g = peso do ativo g no portfólio; e G = número de ativos no portfólio.

Já o retorno esperado de um Portfólio, com ativos arriscados, é dado pela expressão abaixo:

$$E(R_i) = p_1 r_1 + p_2 r_2 + \dots + p_n r_n$$

onde: r_i = taxa de retorno possível para o ativo i ; p_n = probabilidade da taxa de retorno n ocorrer para o ativo i ; e N = número de possíveis ocorrências da taxa de retorno.

Para medir o risco de um portfólio, Markowitz propôs que fosse utilizada a ferramenta estatística da variância, que tem, por definição, como sendo a medida de dispersão em torno de um valor esperado. No entanto o mercado de capitais usa com maior frequência o desvio padrão como medida de risco, devido à característica de possuir a mesma unidade de medida dos ativos, mas que, conceitualmente, é equivalente à variância.

Outra ferramenta importante utilizada pela Teoria é a quantificação da correlação entre os ativos, procurando identificar o quanto os ativos estão relacionados. A diversificação de Markowitz relaciona o grau de correlação entre os retornos dos ativos e procura combinar ativos que têm correlações baixas, permitindo a composição de uma carteira com baixo desvio padrão.

Trabalhar com diversificação de carteiras, nos dias de hoje, é o principal ponto dos negócios ditos *asset management* (gestão de ativos). As administradoras de recursos de terceiros, optam por aperfeiçoar o atendimento aos seus clientes, como aumentar o conjunto de informações disponíveis, central de dúvidas e consultoria, atendimento eletrônico e, principalmente, ter mais domínio dos riscos, conforme o retorno.

O autor não quer com isso afirmar que a diversificação é superior a não diversificação, mas apenas que com ela é possível, combinando ativos de maneira correta, diminuir o risco envolvido, fato que hoje é muito considerado, principalmente após a crise asiática. Como exemplo, pode-se citar o caso de dividir uma aplicação em dois ativos diferentes (ação de duas empresas diferentes). Se os dois papéis tiverem mesma variância, contudo opostas, é possível concluir que uma combinação deles terá variância menor que cada um dos ativos separadamente. O único caso no qual a variância resultante seria maior do que a de cada ativo seria para ativos perfeitamente correlacionados, onde os dois caminham em mesmo sentido.

Dados os avanços da matemática e da estatística, bem como dos recursos computacionais, torna-se cada vez mais plausível encontrar as combinações eficientes de retorno-risco que atendem às expectativas do cliente-investidor. Vale ressaltar que, apesar da tecnologia racional envolvida, a decisão final de onde e como investir acaba por ser do administrador dos recursos, que vai, de acordo com o cenário, aplicar todo seu conhecimento e *feeling* para tomar as decisões no gerenciamento dos recursos.

É em cima desse ponto que propõe-se esse exemplo, baseado em personagens hipotéticos, contudo com dados reais de mercado e próximo à uma situação que não foge muito da rotina dos fundos de investimento. Utilizando os ensinamentos sobre Programação Linear e nossos conhecimentos limitados sobre mercados financeiros, apresentaremos as etapas propostas pela Teoria do Portfólio, ou seja: estabelecer as crenças sobre o mercado e montar uma carteira de investimentos.

2. A Teoria do Portfólio e a Programação Linear:

As técnicas de construção de um Portfólio Eficiente-Markowitz para um grande número de ativos requer considerável quantidade de cálculos, mesmo assim, a Teoria do Portfólio pouco tem se utilizado dos recursos da Programação Linear. Segundo FABOZZI (1995), uma das técnicas matemática mais utilizada é a da programação quadrática. No entanto, segundo o citado autor, outros métodos alternativos, mais simples e que requerem menos recursos computacionais podem ser utilizados pelos investidores. Dentro deste escopo, a programação linear surge com grandes perspectivas de tornar-se importante ferramenta para a análise de investimentos. Para fins didáticos, apresentamos, a seguir, uma situação hipotética onde poderia ocorrer a utilização da programação linear aplicada à Teoria do Portfólio.

2.1. Um Estudo de Caso

O diretor-presidente do Grupo X, Dr. Joaquim, deseja aplicar “sobras de

caixa”, no valor de R\$ 100.000,00 em CDB e nas principais ações do IBOVESPA (blue chips). Dr. Joaquim pede ao seu gerente financeiro, Sr. Silva, que apresente as possíveis ações em que deve aplicar. Antes, Dr. José lembra-o de seu lema: “maior lucro com menor risco possível”. Para resolver a questão, Sr. Silva selecionou da Carteira Teórica do IBOVESPA as 10 principais ações (em termos de quantidade de ações na carteira), conforme tabela abaixo:

Tabela 1: Carteira teórica das principais ações componentes do IBOVESPA

Ação	Tipo	Qtde. Teórica (1)	Participação(%) (2)
TELB4 TELEBRÁS	PN*	32.216,50	40,977
PETR4 PETROBRÁS	PN*	3.280,30	8,356
TELB3 TELEBRÁS	ON*	4.662,41	4,507
TLSP4 TELESP	PN*	1.611,93	4,431
ELET3 ELETROBRÁS	ON*	11.950,33	3,986
ELET6 ELETROBRÁS	PNB*	11.060,72	3,902
CMIG4 CEMIG	PN*	8.262,82	3,157
VALE4 VALE RIO DOCE	PNA	12,54	3,044
BESP4 BANESPA	PN*	4.486,24	2,713
BBDC4 BRADESCO	PN*	27.906,17	2,467

(*) Cotação por lote de mil ações.

(1) Quantidade Teórica válida para o período de vigência da carteira, sujeita a alterações somente no caso de distribuição de proventos (dividendo, bonificação e subscrição) pelas empresas.

(2) Participação relativa das ações da carteira, divulgada para a abertura dos negócios do dia 23/07/98, sujeita a alterações em função das evoluções dos preços desses papéis.

Fonte: <http://www.enfoque.com.br/cotacoes> (31/07/98).

De acordo com a Teoria do Portfólio, para se minimizar o risco deve-se escolher ações que possuem correlações negativas ou baixas entre elas. Atento a este critério, Sr. Silva calculou as correlações dos rendimentos entre as 10 ações, chegando aos seguintes resultados:

Tabela 2: Correlação entre as principais ações componentes do IBOVESPA¹

Código	BES4	BBD4	CMI4	ELE3	ELE6	PET4	TEL3	TEL4	TLS4	VAL4
BES4	1,00	0,59	0,60	0,36	0,40	0,81	0,62	0,57	0,68	0,80
BBD4	0,59	1,00	0,87	0,69	0,72	0,80	0,77	0,86	0,80	0,76
CMI4	0,60	0,87	1,00	0,88	0,89	0,91	0,89	0,88	0,88	0,69
ELE3	0,36	0,69	0,88	1,00	0,99	0,74	0,89	0,81	0,78	0,45
ELE6	0,40	0,72	0,89	0,99	1,00	0,77	0,90	0,82	0,81	0,49
PET4	0,81	0,80	0,91	0,74	0,77	1,00	0,87	0,84	0,89	0,85
TEL3	0,62	0,77	0,89	0,89	0,90	0,87	1,00	0,90	0,86	0,68
TEL4	0,57	0,86	0,88	0,81	0,82	0,84	0,90	1,00	0,79	0,78
TLS4	0,68	0,80	0,88	0,78	0,81	0,89	0,86	0,79	1,00	0,75
VAL4	0,80	0,76	0,69	0,45	0,49	0,85	0,68	0,78	0,75	1,00

¹A correlação foi calculada com base no preço de fechamento dos ativos de - 1/01 a 30/07/98

Diante destes resultados, Sr. Silva sugere ao Dr. Joaquim as ações que possuem o menor índice de correlação para composição de seu portfólio, ou seja, BANESPA, ELETROBRAS, TELEBRAS e VALE DO RIO DOCE, conforme mostrado na tabela a seguir.

Tabela 3: Correlação entre as ações escolhidas para compor o portfólio

Código	ELE3	TEL4	BES4	VAL4
BES4	0,36	0,57	1	0,8
VAL4	0,45	0,78	0,8	1
ELE3	1	0,81	0,36	0,45
TEL4	0,81	1	0,57	0,78

Dr. Joaquim fica satisfeito, **mas agora quer saber quanto deve aplicar em cada ativo para o mês de julho/98**, buscando o maior retorno. Contudo, duvidando da eficiência de seu gerente, faz as seguintes exigências:

- poderá perder, no máximo, 1% das “sobras”;
- para evitar concentração em determinados ativos, exige que, no máximo, 20% seja aplicado em CDB, 40% em BANESPA, 10% em ELETROBRAS, 10% em TELEBRAS e 20% em VALE DO RIO DOCE; e
- a carteira deverá render, no mínimo, igual ao rendimento do CDB.

Deve-se salientar que as principais hipóteses da Teoria do Portfólio foram satisfeitas neste exercício. Dr. Joaquim é avesso ao risco e por isto utiliza-se de instrumentos para evitar perdas em seu portfólio, como a diversificação e a ferramenta estatística da correlação. Além disto, observa-se através do lema do Dr. Joaquim a preocupação com o retorno de seu portfólio.

2.1.1. Formulação Matemática do Problema

Sr. Silva, depois de muito trabalho, apresenta a seguinte formulação matemática para o problema:

- Objetivo: Maximizar o retorno da Carteira;
- Alternativas: aplicação em CDB (x_1); aplicação em BANESPA (x_2); aplicação em ELETROBRAS (x_3); aplicação em TELEBRAS (x_4); e aplicação em VALE R.DOCE (x_5);
- Restrições: capital; risco; exigências máxima da quantidade de ativos; e rentabilidade mínima.

A estrutura matemática deste exercício pode ser apresentada assim:

$$\text{MAX RC} = \text{rm}_1x_1 + \text{rm}_2x_2 + \text{rm}_3x_3 + \text{rm}_4x_4 + \text{rm}_5x_5$$

sujeito à:

$$\begin{aligned} dp_1x_1 + dp_2x_2 + dp_3x_3 + dp_4x_4 + dp_5x_5 &\leq 1.000; x_1 \leq 20.000; \\ x_2 &\leq 40.000; x_3 \leq 10.000; x_4 \leq 10.000; x_5 \leq 20.000; \text{ e} \\ \text{rm}_1x_1 + \text{rm}_2x_2 + \text{rm}_3x_3 + \text{rm}_4x_4 + \text{rm}_5x_5 &\geq \text{rm}_1 * 100.000 \end{aligned}$$

Onde: $\text{rm}_i x_i$: retorno médio/dia para o ativo i ; e $dp_i x_i$: desvio padrão do ativo i^2

² O cálculo do retorno médio diário e do desvio padrão de cada ativo foram elaborados com base no período de 31/01 à 30/07/98.

2.1.2. Análise de Sensibilidade dos Resultados

Utilizando-se da linguagem GAMS, chega-se aos resultados para os meses de fevereiro à julho/98³, conforme a estrutura matemática proposta:

Tabela 4: *solução primal*, fevereiro/98

FEV SOLUTION		IS MAXIMUM	RETURN	347.8518554	PRIMAL PROBLEM SOLUTION	
VARIABLE	STATUS	VALUE	LOWER	UPPER	RETURN	VALUE NET
X.1	BASIS	20000.000	.000000	NONE	.000840	
	000840	.000000				
X.2	BASIS	40000.000	.000000	NONE	.007180	
	007180	.000000				
X.3	BASIS	10000.000	.000000	NONE	.003530	
	003530	.000000				
X.4	BASIS	1016.8675	.000000	NONE	.008410	
	008410	.000000				
X.5	NBASIS	.00000000	.000000	NONE	.009110	
	018644	-.009534				

O retorno médio diário da carteira proposta será de R\$ 347,85, representando R\$ 4.869,90 ao mês (4,98%)⁴. Se compararmos com o rendimento médio mensal do CDB (1,19%), nota-se a ótima rentabilidade da carteira neste mês.

Observa-se que apenas o ativo VALE DO RIO DOCE (X5) não foi incluído na composição da carteira e, a utilização de R\$ 1,00 neste ativo, acarretaria em um decréscimo de R\$ 0,0095 no retorno da carteira. Este ativo só poderia ser considerado na composição da carteira caso seu retorno unitário diário fosse de R\$ 0,018644 e não R\$ 0,009110 como o observado.

Tabela 5: *solução dual*, fevereiro/98

FEV SOLUTION		IS MAXIMUM	RETURN	347.8518554	DUAL PROBLEM SOLUTION	
CONSTRAINT	STATUS	DUAL	VALUE	RHS VALUE	USAGE	SLACK
CAP	NBINDING	.00000000		10000.00	71016.867	
28983.133						
DES	BINDING	.20265060		1000.0000	1000.0000	
.00000000						
MX1	BINDING	.00083189		20000.000	20000.000	
.00000000						
MX2	BINDING	.00291218		40000.000	40000.000	
.00000000						
MX3	BINDING	.00120762		10000.000	10000.000	
.00000000						
MX4	NBINDING	.00000000		10000.000	1016.8675	
8983.1325						
MX5	NBINDING	.00000000		20000.000	.00000000	
20000.000						
MRE	NBINDING	.00000000		84.000000	347.85186	
-263.85186						

³ A solução para os meses de abril, maio e junho foi considerada impossível pelo Software. Os resultados encontram-se em anexo.

⁴ Foram considerados apenas 14 dias úteis de rendimento neste mês.

As restrições relativas ao risco máximo e às quantidades máximas dos ativos X1, X2 e X3 foram atuantes (“binding”), verificando-se pelo fato de não terem folgas (“slack”), conforme tabela acima. Atentando-se ao valor do preço-sombra, vê-se que em se adotando um perfil menos avesso ao risco para o Dr. Joaquim, admitindo-se uma perda máxima de R\$ 1.001,00 (ou seja, R\$ 1,00 a mais no RHS da restrição de risco máximo), obtería-se um acréscimo de R\$ 0,20265 ao resultado da função objetivo.

Já em relação à restrição de capital, observa-se que apenas R\$ 71.016,87 foram utilizados, por isso verifica-se uma folga de 28,98% do capital total. Esta folga de capital ocorre porque nem todos os ativos estão sendo utilizados em seu limite proposto.

Tabela 6: *right-hand-side ranges*, fevereiro/98

FEV SOLUTION IS MAXIMUM		RETURN	347.8518554	RIGHT-
HAND-SIDE RANGES				
CONSTRAINT	STATUS	DUAL	VALUE	RHS VALUE
MINIMUM	MAXIMUM			
CAP	NBINDING	.00000000	00000.00	71016.867
NONE				
DES	BINDING	.20265060	1000.0000	957.80000
1372.8000				
MX1	BINDING	.00083189	20000.000	.00000000
49011.095				
MX2	BINDING	.00291218	40000.000	22298.196
42003.799				
MX3	BINDING	.00120762	10000.000	.00000000
13682.373				
MX4	NBINDING	.00000000	10000.000	1016.8675
NONE				
MX5	NBINDING	.00000000	20000.000	.00000000
NONE				
MRE	NBINDING	.00000000	84.000000	NONE
347.85186				

A tabela acima mostra o intervalo em que a variação no RHS da restrição atuante será diretamente proporcional ao valor de seu preço-sombra. No caso exemplificado da restrição de risco máximo, enquanto o seu RHS variar dentro do intervalo situado entre R\$ 957,80 e 1.372,80, a variação no valor da função objetivo será proporcional ao valor do preço-sombra.

Tabela 7: *objective row ranges*, fevereiro/98

FEV SOLUTION IS MAXIMUM		RETURN	347.8518554
OBJECTIVE ROW RANGES			
VARIABLE	STATUS	VALUE	RETURN/UNIT
MINIMUM	MAXIMUM		
X.1	BASIS	20000.000	.00084000
	NONE		.00000811
X.2	BASIS	40000.000	.00718000
	NONE		.00426782
X.3	BASIS	10000.000	.00353000
	NONE		.00232238
X.4	BASIS	1016.867	.00841000
	NONE		.00410940
			.01278316
X.5	NBASIS	.00000000	.00911000
			NONE
			.01864386

A tabela 7 mostra o intervalo onde o retorno diário dos ativos pode variar sem afetar a solução ótima. Assim, enquanto a mudança no valor diário do ativo X2 situar-se entre 0,0072 e 0,0043 a solução ótima encontrada continuará sendo a mesma.

Dada a volatilidade do mercado de capitais, as informações contidas na tabela 7 são de suma importância para o gerente da carteira, mostrando os intervalos de segurança que permitem obter a solução ótima.

Tabela8: *solução primal*, março/98

MAR SOLUTION IS MAXIMUM		RETURN	251.5951318
PRIMAL PROBLEM SOLUTION			
VARIABLE	STATUS	VALUE	LOWER
VALUE	NET		UPPER
			RETURN
X.1	BASIS	20000.000	.000000
			NONE
			.000700
			.000000
X.2	BASIS	8348.1276	.000000
			NONE
			.009810
			.000000
X.3	BASIS	10000.000	.000000
			NONE
			.002000
			.000000
X.4	BASIS	10000.000	.000000
			NONE
			.003790
			.000000
X.5	BASIS	20000.000	.000000
			NONE
			.004890
			.000000

Para este mês, o retorno médio diário da carteira proposta será de R\$ 251,59, representando R\$ 5.534,98 ao mês (5,538%)⁵. Comparado com o rendimento médio mensal do CDB (1,54%), temos uma boa rentabilidade da

carteira neste mês. Vale notar que, diferentemente do mês anterior, neste mês teríamos a inclusão de todos os ativos propostos na composição do portfólio.

Tabela 9: *solução dual*, março/98

MAR SOLUTION IS MAXIMUM		RETURN	251.5951318
DUAL PROBLEM SOLUTION			
CONSTRAINT	STATUS	DUAL VALUE	RHS VALUE
USAGE	SLACK		
CAP	NBINDING	.00000000	100000.00
			68348.128
			31651.872
DES	BINDING	.13606103	1000.0000
			1000.0000
			.00000000
MX1	BINDING	.00069048	20000.000
			20000.000
			.00000000
MX2	NBINDING	.00000000	40000.000
			8348.1276
			31651.872
MX3	BINDING	.00108023	10000.000
			10000.000
			.00000000
MX4	BINDING	.00301037	10000.000
			10000.000
			.00000000
MX5	BINDING	.00304093	20000.000
			20000.000
			.00000000
MRE	NBINDING	.00000000	70.000000
			251.59513
			-181.59513

Novamente as restrições relativas ao risco máximo e às quantidades máximas dos ativos X1, X3, X4 e X5 foram atuantes (“binding”), apresentando a não existência de folgas (“slack”). Quanto ao valor do preço-sombra, adotando-se um perfil menos avesso ao risco para o Dr. Joaquim e admitindo-se uma perda máxima de R\$ 1.001,00 (ou seja, R\$ 1,00 a mais no RHS da restrição de risco máximo), se conseguiria um acréscimo de R\$ 0,13606 ao resultado da função objetivo, inferior ao mês anterior, porém não menos relevante. Com referência à restrição de capital, nota-se que apenas R\$ 68.348,13 foram utilizados, verificando-se uma folga de 31,65% do capital total. A folga de capital ocorre porque o ativo X2 não está sendo utilizado em seu limite proposto.

Tabela 10: *right-hand-side ranges*, março/98

MAR SOLUTION IS MAXIMUM		RETURN	251.5951318	
RIGHT-HAND-SIDE RANGES				
CONSTRAINT STATUS		DUAL VALUE	RHS VALUE	
MINIMUM	MAXIMUM			
CAP	NBINDING	.00000000	100000.00	68348.128 NONE
DES	BINDING	.13606103	1000.0000	398.10000
3282.1000				
MX1	BINDING	.00069048	20000.000	.00000000
51682.632				
MX2	NBINDING	.00000000	40000.000	8348.1276
NONE				
MX3	BINDING	.00108023	10000.000	.00000000
44926.538				
MX4	BINDING	.00301037	10000.000	.00000000
44384.511				
MX5	BINDING	.00304093	20000.000	.00000000
59003.589				
MRE	NBINDING	.00000000	70.000000	NONE
251.59513				

Identicamente ao exposto anteriormente, a tabela 10 mostra o intervalo em que a variação no RHS da restrição atuante será diretamente proporcional ao valor de seu preço-sombra. No caso exemplificado da restrição de risco máximo, enquanto o seu RHS variar dentro do intervalo situado entre R\$ 398,10 e 3.282,10, a variação no valor da função objetivo será proporcional ao valor do preço-sombra da restrição. Observe que para este mês teremos uma margem de segurança bem maior que no mês anterior.

Tabela 11: *objective row ranges*, março/98

MAR SOLUTION IS MAXIMUM		RETURN	251.5951318	
OBJECTIVE ROW RANGES				
VARIABLE	STATUS	VALUE	RETURN/UNIT	
MINIMUM	MAXIMUM			
X.1	BASIS	20000.000	.00070000	.00000952
NONE				
X.2	BASIS	8348.1276	.00981000	.00000000
.02133136				
X.3	BASIS	10000.000	.00200000	.00091977
NONE				
X.4	BASIS	10000.000	.00379000	.00077963
NONE				
X.5	BASIS	20000.000	.00489000	.00184907
NONE				

A tabela acima identifica o intervalo onde o retorno diário dos ativos pode variar sem afetar a solução ótima. Então, temos que enquanto a mudança no valor diário do ativo X3 ocorrer a partir de 0,00091977, a solução ótima encontrada continuará sendo a mesma.

Tabela 12: *solução primal*, julho/98

JUL SOLUTION IS MAXIMUM PRIMAL PROBLEM SOLUTION		RETURN	531.3000000			
VARIABLE STATUS	VALUE	LOWER	UPPER	RETURN		
VALUE	NET					
X.1		BASIS	20000.000	.000000	NONE	.000570
.000570	.000000					
X.2		BASIS	40000.000	.000000	NONE	.008330
.008330	.000000					
X.3		BASIS	10000.000	.000000	NONE	.002650
.002650	.000000					
X.4		BASIS	10000.000	.000000	NONE	.007200
.007200	.000000					
X.5		BASIS	20000.000	.000000	NONE	.004410
.004410	.000000					

A tabela 12, mostra o maior retorno médio diário da carteira em comparação com os meses anteriores. Será de R\$ 531,30, representando R\$ 10.626,00 ao mês (10,63%)⁶. Frente ao rendimento médio mensal do CDB (1,14%), temos uma *performance* notável da carteira neste período. Notamos, novamente, que neste mês teríamos a inclusão de todos os ativos propostos.

Tabela 13: *solução dual*, julho/98

JUL SOLUTION IS MAXIMUM PROBLEM SOLUTION		RETURN	531.3000000		DUAL
CONSTRAINT STATUS	DUAL VALUE	RHS	VALUE		
USAGE	SLACK				
CAP		BINDING	.00000000	100000.00	100000.00
.00000000					
DES		NBINDING	.00000000	1000.0000	538.90000
461.10000					
MX1		BINDING	.00057000	20000.000	20000.000
.00000000					
MX2		BINDING	.00833000	40000.000	40000.000
.00000000					
MX3		BINDING	.00265000	10000.000	10000.000
.00000000					
MX4		BINDING	.00720000	10000.000	10000.000
.00000000					
MX5		BINDING	.00441000	20000.000	20000.000
.00000000					
MRE		NBINDING	.00000000	57.000000	531.30000
-474.30000					

Interessante, no mês de julho, é observar que todas as restrições relativas às quantidades máximas dos ativos foram atuantes (“binding”), apresentando a não existência de folgas (“slack”). Isto proporcionou a plena utilização dos recursos disponíveis (R\$ 100.00,00). Quanto ao valor do preço-sombra, para o mês temos que a aplicação de uma unidade a mais no ativo X4, proporcionaria um acréscimo de R\$ 0,0072 ao resultado da função objetivo.

Tabela 14: *right-hand-side ranges*, julho/98

JUL SOLUTION IS MAXIMUM		RETURN	531.300000	
RIGHT-HAND-SIDE RANGES				
CONSTRAINT STATUS		DUAL VALUE	RHS	VALUE
MINIMUM	MAXIMUM			
CAP	NBINDING	.00000000	100000.00	100000.00
NONE				
DES	NBINDING	.00000000	1000.0000	538.90000
NONE				
MX1	BINDING	.00057000	20000.000	.00000000
20000.000				
MX2	BINDING	.00833000	40000.000	.00000000
40000.000				
MX3	BINDING	.00265000	10000.000	.00000000
10000.000				
MX4	BINDING	.00720000	10000.000	.00000000
10000.000				
MX5	BINDING	.00441000	20000.000	.00000000
20000.000				
MRE	NBINDING	.00000000	57.000000	NONE
531.30000				

O intervalo em que a variação no RHS da restrição atuante será diretamente proporcional ao valor de seu preço-sombra é mostrado acima. As restrições relativas às quantidades máximas dos ativos mostram que seus RHS's podem variar de zero até o limite proposto pelo Dr. Joaquim.

Tabela 15: *objective row ranges*, julho/98

JUL SOLUTION IS MAXIMUM		RETURN	531.300000		OBJECTIVE
ROW RANGES					
VARIABLE STATUS		VALUE	RETURN/UNIT		
MINIMUM	MAXIMUM				
X.1	BASIS	20000.000	.00057000	.00000000	
NONE					
X.2	BASIS	40000.000	.00833000	.00000000	
NONE					
X.3	BASIS	10000.000	.00265000	.00000000	
NONE					
X.4	BASIS	10000.000	.00720000	.00000000	
NONE					
X.5	BASIS	20000.000	.00441000	.00000000	
NONE					

A tabela 15 mostra-nos o intervalo onde o retorno diário dos ativos pode variar sem afetar a solução ótima. Desse modo, temos que enquanto a mudança permitida – para que a solução ótima permaneça a mesma - no valor diário dos ativos X3 situa-se entre zero ao infinito.

2.1.3. Apresentação da Carteira Ótima

Após estruturar o modelo matemático para cada período e aplicar a linguagem GAMS, o Sr. Silva refletiu sobre os resultados que seriam apresentados ao Dr. Joaquim, pessoa que nunca confiou no mercado acionário, sempre aplicando suas “sobras de caixa” no CDB, o qual considerava a mais segura das aplicações. Após algumas ilações, Sr. Silva acabou por estabelecer a seguinte regra sobre como montar uma carteira de investimento ao Dr. Joaquim para o período de agosto (tendo como pressuposto as exigências impostas pelo Dr. Joaquim anteriormente):

Dado o conservadorismo e a aversão ao risco inerente ao seu chefe e tendo em mãos os resultados dos cinco períodos (fevereiro a junho/98) para os quais aplicou a programação linear, montou o seguinte quadro:

Tabela 16: Parcela do capital aplicado em cada Ativo, em R\$

	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN
X1	20.000,00	20.000,00	0,00	0,00	0,00
X2	40.000,00	8.348,13	0,00	0,00	0,00
X3	10.000,00	10.000,00	0,00	0,00	0,00
X4	1.016,87	10.000,00	0,00	0,00	0,00
X5	0,00	20.000,00	0,00	0,00	0,00
CDB	28.983,13	31.651,87	100.000,00	100.000,00	100.000,00

De acordo com os resultados obtidos através do ORSYS, foi montada a tabela acima, onde consta a quantidade de capital aplicada em cada um dos cinco ativos (CDB, BANESPA, ELETROBRAS, TELEBRAS e VALE) e o restante seria aplicado diretamente no CDB. Vale notar que para os períodos que não cumpriram as imposições do Dr. Joaquim, no caso abril, maio e junho, o capital seria aplicado em CDB, pois a eventual aplicação em ações traria um

rendimento médio negativo.

A partir dessa distribuição do capital, Sr. Silva elaborou um novo quadro com os retornos médios ótimos obtidos em cada um dos períodos analisados.

Tabela 17: Retorno médio da carteira e CDB para cada período, em R\$

	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN
CARTEIRA	4.869,90	5.535,20	0,00	0,00	0,00
CDB	344,90	487,75	1.128,00	1.250,00	1.209,00
Total	5.214,80	6.022,95	1.128,00	1.250,00	1.209,00

Com essa atitude, o Sr. Silva obteria um rendimento médio no mínimo equivalente ao do CDB para os cinco períodos, contentando o Dr. Joaquim sobre a *performance* da aplicação. Em cima desses rendimentos médios, encontrou-se o peso do retorno de cada mês sobre a soma dos rendimentos totais para os cinco períodos, que foi de R\$14.824,75

Tabela 18: Ponderação do retorno médio mensal de cada mês sobre o rendimento médio total para o período (fev-jun/98)

FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	Total
5.214,80	6.022,95	1.128,00	1.250,00	1.209,00	14.824,75
35,176%	40,628%	7,609%	8,432%	8,155%	100%.

Os pesos referentes a cada período foram obtidos dividindo-se o retorno médio de cada mês sobre a soma dos mesmos (como exemplo pode-se apontar que, fevereiro teve um peso de 35,176% sobre o rendimento médio, para os cinco períodos, que foi de R\$ 14.824,75).

Essa operação serviu para distribuir as “sobras de caixa” da empresa do Dr. Joaquim nos ativos da carteira proposta para o mês de julho, lembrando que devem ser respeitadas as restrições preestabelecidas. Dessa forma, multiplicando o peso inerente a cada mês com a parcela de capital aplicada em cada ativo para o mesmo mês, obteve-se a seguinte distribuição:

Tabela 19: Quantidade de R\$ a ser aplicada em cada ativo, considerando o peso de cada mês sobre o retorno médio total para o período (fev-jun/98)

	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JULHO
X1	7.035,20	8.125,60	0,00	0,00	0,00	15.160,00
X2	14.070,40	3.391,68	0,00	0,00	0,00	14.462,00
X3	3.517,60	4.062,80	0,00	0,00	0,00	7.580,40
X4	57,69	7.062,80	0,00	0,00	0,00	7.420,49
X5	0,00	8.125,60	0,00	0,00	0,00	8.125,60
CDB	10.195,11	12.859,52	7.609,00	8.432,00	8.155,00	47.250,63
Total						99.999,12

Como exemplo, pode-se tomar o mês de fevereiro, que teve R\$20.000,00 aplicado em X1 (CDB). Multiplicando esse valor pelo peso de ativo no rendimento total deste mês (35,176%), obtém-se R\$7.035,20. Somando com os valores obtidos para X1 em relação aos outros meses, chega-se ao valor de R\$15.160,00 a ser aplicado em X1, em julho. Ressalta-se que a última linha refere-se ao capital considerado “sobra” da carteira e será aplicado no CDB.

Assim, distribuindo o capital de R\$100.000,00 na carteira de investimento proposta pelo Sr. Silva, de acordo com a ponderação dos períodos já passados, nota-se a distribuição do capital entre os ativos da seguinte forma: R\$52.748,49 seriam aplicados na carteira e os R\$47.250,63 iriam para o CDB. Tendo em mãos os dados reais para o mês de julho/98, vamos comparar o rendimento dessa proposta de carteira de investimentos:

Tabela 20: Quantidade de R\$ aplicada em julho/98, considerando o peso de cada mês sobre o retorno médio total para o período (fev-jun/98)

Ativo	Qtde. aplicada em julho	Rendimento do ativo em julho¹	do Retorno de cada Ativo
X1	15.160,00	1,142%	173,06
X2	14.462,00	16,801%	2.429,70
X3	7.580,40	3,826%	289,25
X4	7.420,49	14,871%	1.103,53
X5	8.125,60	8,655%	703,31
CDB	47.250,63	1,142%	539,39
Total	99.999,12		5.238,25

¹ O rendimento de cada ativo no mês de julho foi considerado como a divisão preço do ativo no dia 31/07 pelo preço do ativo no dia 01/07.

De acordo com o exposto acima, verificamos que o retorno da carteira proposta (5,2383%) foi bem superior ao rendimento mensal do CDB (1,142%). Como o Dr. Joaquim seguiu as orientações do Sr. Silva, ele chegou no dia 31/07/98 com um montante de R\$ 105.238,25. A estratégia adotada gerou um retorno excedente de R\$ 4.186,25 sobre o CDB (caso ele aplicasse o capital total somente em CDB, teria um montante de R\$ 101.142,00, assim, R\$ 105.238,25 – R\$ 101.142,00 = R\$ 4.186,25).

Considerações Finais

A proposta do artigo foi encontrar a melhor alocação do capital do Dr. Joaquim para o mês de julho/98, observando as restrições impostas pelo mesmo. Para tanto, utilizamos a linguagem GAMS, gerando os resultados discutidos anteriormente. Caso o Dr. Joaquim tivesse seguido as orientações do Sr. Silva, aplicando suas sobras de caixa, observando os resultados do mês anterior, obteriam um retorno superior a mais de quatro vezes e meio de uma simples aplicação em CDB (5,283% da carteira contra 1,142% do CDB).

No entanto, a carteira proposta foi ponderada pelas quantidades sugeridas pela resolução do problema e pelo retorno médio de cada mês. Tal procedimento, com certeza, não afasta os riscos sistemático e não-sistemático que existem em aplicações em ativos arriscados. O artigo aqui desenvolvido, buscou apenas, através da Teoria do Portfólio e da Programação Linear, diminuir estes riscos para um investidor avesso a risco. Iniciativas como esta serão bastante importantes no futuro próximo, tendo em vista a disseminação da informação através da informática e da crescente exigência do investidor quanto ao tratamento de seu capital por parte dos gerentes de portfólios.

Dentro deste novo perfil, segundo o jornal A CIDADE (09/08/98), a CVM obrigará todos os bancos e administradores a informar com destaque aos investidores o risco de seus fundos, como por exemplo o rendimento dos últimos 12 meses. Os fundos que tiverem o risco maior que o patrimônio investido, ou seja, nos quais o investidor tem o risco de perder o patrimônio inteiro e ainda ter um prejuízo adicional, deverão ser identificados como de “tarja preta”, como ironiza o presidente da CVM, Francisco Silva. Assim, acredita-se que este artigo tornar-se-á apenas uma das futuras pesquisas na área de mercado de capitais, desenvolvidas pelo setor acadêmico.

Vale lembrar que poderíamos traçar vários cenários, modificando o perfil do Dr. Joaquim (tornando-o mais ou menos avesso ao risco, modificando as quantidades máximas de ativos ou incluindo ações mais voláteis). Enfim, pode-se fazer “n” variações do modelo aqui desenvolvido, adaptando-o as características de cada investidor, contudo acreditamos que o principal era atingir o objetivo proposto (encontrar uma carteira de investimentos para julho/98 mais rentável

que uma aplicação em CDB).

SOUZA, Zilmar José de. e BIGNOTTO, Edson Costa. Portfolio theory: optimal composition of na investment portfolio. **Economia & Pesquisa**, Araçatuba, v.1, n.1, p. 61-78, mar. 1999.

Abstract: The article objectives the application of Portfolio Theory, developed by Harry Markowitz, in optimal composition of an basket assets, searching the maximization of the expected return, using the programming linear techniques by language GAMS, applied to the hypothetical situation.

Keywords: Portfolio; diversification; return; risk; GAMS.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- FABOZZI, F.J. **Investment management**. New Jersey: Prentice Hall, 1995.
- FUNDOS de investimento terão nova regulamentação. **A Cidade**, Ribeirão Preto, 09 ago. 1998.
- MYERS, S.C., ROBICHEK, A. A. **Otimização das decisões financeiras**. São Paulo: Atlas, 1971.
- MARKOWITZ, H.M. Portfolio selection **Journal of Finance** , v.07, p.77-91, mar. 1952.
- STIX, G. A Calculus of risk **Scientific American**, v.87 , n.03, may 1998..